Limite e Continuidade

Professor: Gustavo Adolfo

Resumo

Limite

Definição: Seja f uma função real de duas variáveis reais cujo domínio $D(f)$ contém pontos arbitrariamente pertos do ponto (a,b). Então, dizemos que o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a (a,b) é igual a L, e escrevemos:

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) = L$, quando $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0; 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$.

Se $f(x,y) \to L_1$ quando $(x,y) \to (a,b)$ por um caminho C_1 e $f(x,y) \to L_2$ quando $(x,y) \to (a,b)$ por um caminho C_2, sendo $L_1 \neq L_2$, então:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) \text{ NÃO EXISTE.}$$

Ex.1: Mostre que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

Resolução:

i. Ao longo do eixo $\overrightarrow{0x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

ii. Ao longo do eixo $\overrightarrow{0y}$

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0-y^2}{0+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1$$

Como o limite tomando dois caminhos diferentes obtiveram valores diferentes, podemos concluir que o limite não existe.

Ex.2: Mostre que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe.

Resolução:

i. Ao longo do eixo $\overrightarrow{0x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0} = 0$$

ii. Ao longo do eixo $\overrightarrow{0y}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2} = 0$$

iii. Ao longo da reta $y = x$

$$\lim_{y\to x} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to x} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Como o limite tomando dois caminhos diferentes obtiveram valores diferentes, podemos concluir que o limite não existe.

Ex.3: Mostre que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Resolução:

$$0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$$

<u>Prova:</u> Seja $\varepsilon > 0$. Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Então,

$$0 < \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 3\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow 3|y| < \varepsilon \Rightarrow \frac{3x^2y}{x^2+y^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0 \qquad \blacksquare$$

Continuidade

Uma função f real de duas variáveis reais é contínua em (a, b) quando:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que f é contínua em seu domínio $D(f)$ quando é contínua para cada $(a, b) \in D(f)$.

Observação: Toda função polinomial de duas variáveis é contínua. Assim como suas somas, diferenças, produtos e razões.

Ex.4: Calcule

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$$

Resolução:
Substituindo os valores de x e y, encontramos que o limite é igual a 11.

Ex.5: Para quais pontos a função

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

É contínua?

Resolução:
O domínio da função é: $D(f) = \mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$
Então podemos concluir que ela é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$ com exceção do $(0,0)$.